

ОҢ ЖАҒЫ АРНАЙЫ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСІ
ҮШІН КЕРІ ЕСЕП

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

10 қазан 2025
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу

Негізгі сұрақтар:

- 1 Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің әлсіз қойылымы
- 2 Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есепке эквивалентті локалды емес тура есеп
- 3 Локалды емес тура есептің әлсіз және әлді шешімінің бар болуы
- 4 Локалды емес тура есептің әлсіз және әлді шешімінің жалғыздығы



АБұл дәрісте алдыңғы 3-4 дәрістерде қарастырылған (1.1)-(1.5) кері есебінің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы есептің берілгендеріне қойылған (1.18) шарттың көмегінсіз тұжырымдалады. Ол тек (1.1) теңдеулер жүйесінің оң жағын арнайы түрде $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) := \omega(\mathbf{x})$ деп жеке жағдайын қарастырған да ғана (1.18) шарттан құтылуға болады. Оң жағы арнайы түрдегі сызықты емес Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есепті қарастырайық

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \omega(\mathbf{x}) \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \omega d\mathbf{x} = e(t), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$



Айталық, 3-дәрістегі (1.9), (1.10) және

$$\omega \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6)$$

шарттар орынды болсын.

Демек, қарастырылып отырған (1)-(5) кері есебіне эквивалентті $\mathbf{u}$ функциясын табуға арналған тура есеп келесі түрде болады, яғни (3) бастапқы және (4) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds + \nabla p = \\ F_3(\mathbf{u}, t) \omega(\mathbf{x}), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (7)$$

теңдеуді қанағаттандырады, мұндағы $F_3(\mathbf{u}, t)$ функционалы

$$\begin{aligned} F_3(\mathbf{u}, t) := \frac{1}{\omega_0} \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} - \right. \\ \left. ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \omega)_{2,\Omega} ds \right) \end{aligned} \quad (8)$$

өрнегімен анықталады және $\omega_0 = \|\omega\|_{2,\Omega}^2 > 0$ тұрақты.



Lemma

Айталық, 3-дәрістегі (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Онда (1)-(5) кері есебі (7), (3), (4) тура есебіне эквивалентті.

Бұл лемма аналогты түрде 3-дәрістегі 1.1-лемма секілді дәлелденеді.



Енді (7), (3), (4) тура есебінің әлсіз шешімінің бар болуы туралы келесі теорема орынды.

Theorem

Айталық, 3-дәрістегі (1.7), (1.11)-(1.12) және (6) шарттар орындалсын. Онда ақырлы $T_2 \in (0, T]$ уақыты табылып, 3-дәрістегі (1.79), (1.76), (1.77) локалды емес тура есебінің Q_{T_2} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, сонымен бірге 1-лемма бойынша эквивалентті (1)-(5) кері есебінің де әлсіз шешімі бар болады және ол барлық $t \in (0, T_2]$ үшін (1.72) бағалауды қанағаттандырады, мұндағы T_2 мәні төменде (16) өрнекпен анықталады.



Жоғарыдағы тұжырым аналогты түрде алдыңғы 3-4 дәрістерде қарастырылған (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімділігі секілді (1)-(5) кері есебі үшін де дәлелденеді. Нақтырақ айтқанда, (7), (3), (4) тура есебінің әлсіз шешімі барлық $t \in (0, T]$ үшін 3-дәрістегі (1.72) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Ал дәлелдеу алгоритмі 3-4 дәрістегі қарастырылған 1.1-теореманың дәлелдеуі секілді жүргізіледі. Демек, (1.25) және (1.26) өрнектеріне аналогты энергетикалық теңдіктерге алып және оларды біріктірсек, онда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ & \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} ds - \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + F_3(\mathbf{u}^n(t), t) e(t) + \\ & F_3(\mathbf{u}^n(t), t) e'(t) + ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (9)$$

теңдігі алынады, мұндағы $F_3(\mathbf{u}^n, t)$ функционалы (8) өрнекпен анықталған және



$$|F_3(\mathbf{u}^n, t)| \leq \frac{1}{k_0} \left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}} (\varkappa \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + C^2(\Omega) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}) \right]. \quad (10)$$

бағалауын қанағаттандырады.

Соңғы (9) теңдіктің оң жағын бағалау үшін ең алдымен, үшінші және төртінші қосылғыштарға, сәйкесінше, 3-дәрістегі (1.30) және (1.31) бағалауларды (10) өрнекпен бірге пайдаланып бағаласақ, онда келесі



$$\begin{aligned}
|F_3(\mathbf{u}^n, t)e(t)| &\leq \frac{|e(t)|}{\omega_0} \left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}} (\varkappa \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + \right. \\
&\quad \left. C^2 \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \frac{1}{2\omega_0} (|e(t)|^2 + |e'(t)|^2) + \\
&\quad \frac{\varkappa}{8} \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{2\varkappa |e(t)|^2}{\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\nu^2 |e(t)|^2}{2\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^4 \\
&\quad + \frac{C^4}{2\omega_0^2} |e(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2} |e(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds.
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
|F_3(\mathbf{u}^n, t)e'(t)| &\leq \frac{|e'(t)|}{\omega_0} \left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}} (\varkappa \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + \right. \\
&\quad \left. C^2 \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \frac{1}{\omega_0} |e'(t)|^2 + \frac{\varkappa}{8} \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
&\quad \frac{2\varkappa |e'(t)|^2}{\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\nu^2 |e'(t)|^2}{2\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^4 \\
&\quad + \frac{C^4}{2\omega_0^2} |e'(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2} |e'(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds,
\end{aligned} \tag{12}$$



теңсіздіктер қорытылады, сондай-ақ, $\varepsilon_1 := \frac{\varkappa}{2}$ жағдайда бірінші, екінші және бесінші қосылғыштарға, сәйкесінше, 3-дәрістегі (1.28), (1.29) және (1.32) бағалауларды ескерсек, онда

$$z(t) := 1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2$$

функциясы үшін келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$\begin{aligned} z'(t) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \\ C_1 \int_0^t z(s) ds + C_2 z(t) + C_3 z^2(t) + C_4(t) \end{aligned} \quad (13)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} C_1 &:= \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{4k_0^2}{\varkappa} + 2 \right); \quad C_2 := \frac{2}{\nu + \varkappa}; \quad C_3 := \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(2 + \frac{4C^2(\Omega)}{\varkappa} \right) \\ C_4(t) &:= \frac{1}{\omega_0} \left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2 \right) + \frac{2}{\omega_0} |e'(t)|^2 + \\ &\frac{\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2}{\omega_0^2} \left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2 \right) (4\varkappa + \nu^2 + C^4(\Omega) + K_0^2) \end{aligned}$$

Енді (13) өрнекті s бойынша 0—ден t —ға шейін интегралдап, 3-дәрістегі (1.24) өрнекті ескерсек, онда

$$z(t) + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_T)}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 \leq$$



$$C_5 = \max \{C_1 T + C_3; C_2\}; C_6 = 1 + \|u_0\|_{2,\Omega}^2 + (\kappa + \nu) \|u_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^t C_4(s) ds.$$

Әрі қарай $z(t)$ функциясы үшін сызықтық емес Гронуолл теңсіздігін қолданғанда, онда (13) өрнектен келесі бағалау қорытылады

$$z(t) \leq \frac{C_6}{1 - C_5 C_6 t} \equiv K_2 < \infty \quad (15)$$

және төмендегі уақыт аралығы үшін орынды

$$0 \leq t \leq T_2 < T_* := \frac{1}{C_5 C_6}. \quad (16)$$

Демек, кез келген $t \leq T_2 < T_*$ үшін (15) өрнектен келесі бағалау орынды екенін көруге болады

$$\|u^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \kappa) \|u^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq K_2. \quad (17)$$



(1.37) бағалауды (13) өрнектің оң жағына қолданып және $t \in [0, T_2]$ бойынша супремум алғанда, келесі априорлық бағалау тұжырымдалады

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T_2]} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2, \Omega}^2 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0, T_2; \mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_{T_2})}^2 + \\ & \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0, T_2; \mathbf{V})}^2 \leq C := C(\nu, \kappa, T_2, K_2, C_5, C_6). \end{aligned} \quad (18)$$



Theorem

Айталық, 2-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (1.49) шарт орынды болсын. Онда (7), (3), (4) тура есебінің әлді шешімі бар болады, сонымен бірге 1-лемма бойынша оған эквивалентті (1)-(5) кері есебінің әлді шешімі табылады және ол барлық $t \in (0, T_2]$ үшін (1.73) бағалауды қанағаттандырады.



Демек, (1.52) өрнегіне аналогты энергетикалық теңдік келесі түрде болады

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & - \left((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}^n(t), \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right) - \int_0^t K(t-s) \left(\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s), \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} ds + \\ & F_3(\mathbf{u}^n, t) \left(\omega, -\tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} := I_7, \end{aligned} \quad (19)$$

Соңғы өрнектің оң жағын бағалау үшін Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін және (10) бағалауды бірге қолданайық, демек,

$$\begin{aligned} |I_7| \leq & \frac{\varkappa}{2} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{2\varkappa} \left[C \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \right. \\ & \left. K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_3|^2 \left\| \omega \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$



(20) бағалауды (19) теңдікке ескергенде, келесі теңсіздік қорытылады

$$\nu \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{3}{\varkappa} \left[C \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_3|^2 \left\| \omega \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \quad (21)$$

Енді (21) өрнекті s бойынша 0—ден t —ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds \leq C_7 + C_8 \int_0^t \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds, \quad (22)$$

мұндағы

$$C_7 := \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_0 \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa} \left\| \omega \right\|_{2,\Omega}^2 \int_0^{T_2} |F_3(s)|^2 ds < \infty,$$

$$C_8 := \frac{3}{\nu \varkappa} \left(C(\Omega) \sup_{t \in [0, T_2]} \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 T \right) < \infty.$$



Мұнан кейін, (22) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

$$\left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} C_7 e^{C_8 T_2}, \quad \forall t \in (0, T_2) \quad (23)$$

бағалауы қорытылады. Егер (22) өрнектің екі жағынан $t \in [0, T_2]$ бойынша супремум алып және (23) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t \in [0, T_2]} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n \right\|_{L^2(Q_{T_2})}^2 \leq C := C(\nu, \kappa, C_7, C_8, T_2) < \infty. \quad (24)$$



Theorem

Айталық, 2-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1)-(4), (8) есебінің әлсіз шешімі жалғыз болады.

Бұл тұжырымның дәлелдеуі 3-дәрістегі 1.3-теореманың дәлелдеуіне аналогты түрде тұжырымдалады.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

